

Descriere soluție – Problema 3 - VIP

Student Posdarascu Eugenie Daniel – Universitatea din Bucuresti

Solutie $O(N \cdot \sigma)$

Pasul 1:

In primul rand o sa incercam o abordare prin care determinam orice solutie corecta, nu neaparat cea minim lexicografica. Mai mult, consideram cazul particular $N = K$ (toate pozitiile sa difere).

Daca exista un caracter X a carei suma a frecventelor din primul, respectiv al doilea sir, depaseste N , este evident din principiul cutiei ca nu avem solutie. Formal, notand $f1[x]$ = frecventa caracterului x in primul sir si $f2[x]$ = frecventa caracterului x in al doilea sir, daca exista x pentru care $f1[x] + f2[x] > N$ atunci nu avem solutie.

Daca nu exista niciun caracter x pentru care se respecta proprietatea de mai sus, atunci putem demonstra ca exista intotdeauna solutie. O posibila abordare pentru reconstituirea solutiei ar fi in felul urmator:

1. Selectam cel mai frecvent element din sirul 1, notam cu X .
2. Selectam cel mai frecvent element din sirul 2, notam cu Y .
3. Daca $X \neq Y$, le putem imperechea. Altfel, imperechem X cu Z , al doilea cel mai frecvent element din sirul 2.

Prin urmare, putem afirma ca invariantul pentru acest caz particular este $f1[x] + f2[x] \leq N$, pentru orice X de la 'a' la 'z'.

Pasul 2:

Acum vom incerca sa rezolvam problema pentru orice K din intervalul $[0, N]$ (inca nu dorim sirul minim lexicografic).

Sa presupunem ca din cele N pozitii disponibile, avand K = numarul de pozitii prin care difera sirurile, notam $P = N - K$ = numarul de pozitii in care sirurile sunt similare. Vom incerca sa fixam toate cele P pozitii in care caracterele sirurilor coincid pentru a reduce problema la varianta de la pasul 1. Astfel, o operatie prin care selectam un caracter X atat din sirul 1, cat si din sirul 2, pentru a le imperechea, va scadea valoarea sumei $f1[X] + f2[X]$ cu doua unitati. Din moment ce vrem sa reducem problema pe cazul particular de la pasul 1 in care lungimea sa aiba dimensiunea K , invariantul devine $f1[X] + f2[X] \leq K$. Prin urmare, toate caracterele pentru care nu se respecta aceasta proprietate trebuie imperecheate pentru a le reduce suma frecventelor. In concluzie, o abordare pentru aceasta subproblema este in felul urmator.

1. Selectam caracterul X cu $f1[X] + f2[X]$ maxim.
2. Imperechem un caracter X din sirul 1 cu un caracter X din sirul 2.
3. Repetam procedeul de P ori, daca se poate.
4. Daca am putut actualiza toate cele P imperecheri, iar la final $f1[X] + f2[X] \leq K$ pentru orice X , avem solutie si rezolvam in continuare aplicand procedeul de la pasul 1.

Astfel, invariantul pentru aceasta subproblema devine:

1. Pentru fiecare caracter X unde $f1[X] + f2[X] > K$, calculam numarul de operatii necesar pentru ca aceasta suma sa scada sub K . Mai exact, $(f1[X] + f2[X] - k + 1)/2$. Evident, aceasta valoare trebuie sa fie mai mica decat $\min(f1[X], f2[X])$ (numarul maxim de imperecheri pe care le putem face cu caracterul X).

$$(f1[X] + f2[X] - k + 1) / 2 \leq \min(f1[X], f2[X])$$

2. Numarul total de operatii pentru toate caracterele il notam cu $total_op$. Acest numar nu trebuie sa depaseasca P (deoarece avem voie sa aplicam maxim P imperecheri).

$$total_op = \text{Suma}((f1[X] + f2[X] - k + 1) / 2) \leq P$$

3. Primele doua restrictii ne garanteaza ca nu avem nevoie de mai mult de P imperecheri. Cu toate acestea, trebuie sa aplicam fix P imperecheri, deci numarul maxim de imperecheri pe care le putem face trebuie sa fie cel putin P .

$$P \leq \text{Suma}(\min(f1[X], f2[X]))$$

Pasul 3:

Vom incerca sa determinam solutia minima lexicografic. Selectam fiecare pozitie de la stanga la dreapta si incercam pe rand sa fixam fiecare caracter valid. Daca in urma unei astfel de fixari, invariantul de la pasul 2 se pastreaza, avem solutie. Altfel, incercam alt caracter. Mentinerea invariantului se poate realiza atat in $O(1)$, cat si in $O(\sigma)$.

Daca invariantul de la pasul 2 nu se pastreaza de la bun inceput, raspunsul este -1.

Complexitatea finala optima: $O(N * \sigma)$. O implementare atenta in $O(N * \sigma^2)$ obtine de asemenea 100 de puncte.