

Descriere soluție - Problema 1 - nozero

Autor: stud. Iordache Ioan-Bogdan
Universitatea din București

Observația principală care ne duce la rezolvarea problemei este că numărul K este mic în comparație cu numărul total de permutări de ordin N ($N!$). De aceea pentru orice $N \geq 13$ și orice $K \leq 10^9$, primele $N-13$ poziții vor fi fixate (avem valoarea egală cu poziția) și doar ultimele cel mult 13 valori vor fi permutate.

Astfel ajungem la următoarele subprobleme:

Subproblema 1: determinăm a K -a permutare în ordine lexicografică de dimensiune cel mult 13 (notăm această dimensiune cu M).

Această subproblemă se poate rezolva în mai multe moduri întrucât lungimea permutărilor este mică. O variantă ar fi să încercăm să fixăm pe rând de la stânga la dreapta valorile. Pentru poziția i încercăm în ordine crescătoare toate valorile care nu au fost puse încă, dacă o fixăm pe aceasta știm că elementele din dreapta ei pot fi permutate în $(M-i)!$ moduri. Dacă numărul de moduri în care mai putem permuta ultimele $M-i$ valori este mai mic decât K , scădem din K acest număr și încercăm o valoare mai mare pe poziția i . La final vom avea toate valorile setate, iar $K = 0$.

Subproblema 2: determinarea numărului de valori care conțin cifra 0 și sunt mai mici sau egale decât un P dat.

Deoarece știm că primele aproximativ $N-13$ valori (al căror număr îl vom nota cu P) sunt egale cu poziția lor din permutare, este suficient să numărăm câte dintre aceste valori conțin 0.

Pentru un număr de cifre c fixat avem 9^c valori de c cifre care nu conțin cifra 0. Cu această relație numărăm toate valorile care au numărul de cifre strict mai mic decât numărul de cifre ale lui P .

Mai avem de numărat valorile care au același număr de cifre cu P și nu conțin 0. Fiind mai mici decât P și având același număr de cifre, putem grupa aceste valori după lungimea celui mai lung prefix pe care îl au în comun cu P . Dacă acest prefix conține 0 nu avem ce număra, iar dacă nu, vedem câte cifre nenule mai mici strict decât cifra de pe poziția imediat următoare prefixului din P există, iar pentru fiecare din aceste variante celelalte cifre pot fi fixate cu oricare dintre cele 9 valori nenule posibile.

Din cele două subprobleme putem determina câte poziții sunt valide (poziția nu conține cifra 0 și valoarea de la acea poziție nu conține 0).

Pentru abordări diferite ale fiecărei subprobleme se pot obține punctaje parțiale:

- **16 puncte** dacă se generează iterativ primele K permutări de lungime N și se verifică fiecare poziție separat.
- **33 puncte** dacă se rezolvă subproblema 1, dar apoi se parcurg toate valorile pentru a le identifica pe cele care conțin 0.
- **14 puncte** pentru $K = 1$ (permutarea identică) dacă se face doar numărarea de la subproblema 2.