Problema 1 evip 100 de puncte

Descrierea soluției

Cerința 1)

$Se\ identifică\ secvențele\ maximale, de\ cifre\ impare\ (impar_k), urmate\ de\ cifre\ pare(par_k). Fiecare\ astfel\ de\ secvență$

$conține\ impar_k * par_k\ numere\ VIP.\ Fie\ m\ numărul\ acestor\ secvențe. Se\ calculează\ și\ se\ afișează\ \sum_{k=1}^{m} impar_k * par_k$.

Cerința 2)

$Fie\ v\ numărul\ numerelor\ VIP\ aflate\ în\ șirul\ dat.$

$Lungimea\ celui\ mai\ scurt\ șir\ ce\ are\ toate\ cifrele\ impare\ înaintea\ celor\ pare\ și\ conține\ exact\ v\ numere\ VIP\ este$

$d_k + \frac{v}{d_k}, unde\ d_k\ reprezintă\ cel\ mai\ mare\ divizor\ al\ lui\ v, 1 \le d_k \le \sqrt{v}, v = d_k * \left(\frac{v}{d_k}\right)$

$Demonstrație$

$Fie\ a\ numărul\ de\ cifre\ impare\ și\ b\ numărul\ de\ cifre\ pare\ din\ șirul\ s\ de\ lungime\ a + b.$

$Această\ împărțire\ determină\ a * b\ numere\ VIP.\ Dacă\ în\ șir\ trebuie\ să\ existe\ v\ numere\ VIP \Rightarrow v = a * b.$

$Dacă\ a_1 * b_1 = a_2 * b_2\ sunt\ două\ descompuneri\ distincte\ ale\ numărului\ v, cu\ 1 \le a_1 < a_2 \le \sqrt{v}\ \Rightarrow$

$b_1 = \frac{v}{a_1}, b_2 = \frac{v}{a_2}$

$l_1 = a_1 + b_1 = a_1 + \frac{v}{a_1}, l_2 = a_2 + b_2 = a_2 + \frac{v}{a_2}$

$l_2 - l_1 = a_2 + \frac{v}{a_2} - \left(a_1 + \frac{v}{a_1}\right) = (a_2 - a_1) + v * \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) = (a_2 - a_1) + v * \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 * a_2}\right) = (a_2 - a_1)\left(1 - \frac{v}{a_1 * a_2}\right)$

$l_2 - l_1 = (a_2 - a_1)\left(\frac{a_1 * a_2 - v}{a_1 * a_2}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} a_2 - a_1 > 0 \\ a_1 < a_2 \le \sqrt{v} \Rightarrow a_1 * a_2 - v < 0 \\ a_1 * a_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow l_2 - l_1 < 0 \Rightarrow l_2 < l_1, pentru\ 1 \le a_1 < a_2 \le \sqrt{v}$$

Cerința 3)

$Se\ identifică\ cel\ mai\ mare\ număr\ VIP\ din\ șir\ și\ se\ determină\ mulțimea\ cifrelor\ distincte\ utilizate\ în\ scrierea$
$acestuia\ \{x_1, x_2, \dots x_k\}.\ În\ fiecare\ număr, trebuie\ să\ apară\ fiecare\ dintre\ cele\ k\ cifre\ distincte.$

$Fiecare\ dintre\ cifrele\ acestei\ mulțimi\ se\ poate\ afla\ pe\ oricare\ dintre\ cele\ k\ poziții.$

$Mai\ întâi\ se\ calculează\ câte\ numere\ se\ pot\ forma\ cu\ cele\ k\ cifre. Dacă\ fixăm\ prima\ cifră\ pe\ una\ dintre\ cele\ k$
$poziții, atunci\ cea\ de-a\ doua\ cifră\ poate\ ocupa\ oricare\ dintre\ cele\ k-1\ poziții\ rămase\ ș.a.m.d. Penultimei$
$cifre\ îi\ rămân\ două\ poziții, iar\ ultima\ cifră\ se\ așează\ pe\ ultimul\ loc\ râmas.$

$Notăm\ acest\ număr\ cu\ \ nr = k * (k-1) * (k-2) * \dots * 2 * 1$

$Așezând\ numerele\ unele\ sub\ altele, se\ observă\ că\ suma\ cifrelor\ de\ pe\ fiecare\ ordin\ este\ aceeași. Notăm\ această$
$sumă\ cu\ s. Mai\ mult, toate\ cele\ k\ cifre\ apar\ de\ același\ număr\ de\ ori\ pe\ oricare\ ordin\ (al\ unităților, al\ zecilor, al$
$sutelor\ etc). Fiind\ nr\ numere\ în\ total\ \Rightarrow fiecare\ cifră\ va\ apărea\ de\ \frac{nr}{k}\ ori\ în\ s.\ Așadar, s = \frac{nr}{k} * \sum_{i=1}^{k} x_k \Rightarrow$

$$s = \frac{k * (k-1) * \dots * 2 * 1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_k \Rightarrow s = (k-1) * \dots * 2 * 1 * \sum_{i=1}^{k} x_k$$

$Suma\ tuturor\ numerelor = \sum_{i=0}^{k-1} s * 10^i = s * \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = s * \underbrace{111 \dots 1}_{de\ k\ ori}$

$Cea\ mai\ mare\ sumă\ se\ obține\ atunci\ când\ cel\ mai\ mare\ număr\ VIP\ conține\ toate\ cele\ 9\ cifre\ distincte\ (201599999798400)$

$Exemplu. Pentru\ mulțimea\ \{1,3,4\}, k = 3, \sum_{i=1}^{k} x_k = 1 + 3 + 4 = 8 => s = 2 * 1 * 8 = 16 =>$

$Suma\ tuturor\ numerelor = 16 * 1 + 16 * 10 + 16 * 100 = 16 * 111 = 1776$