Problema 2 – doilan   100 de puncte

Autor: prof.Carmen Mincă
Colegiul Național de Informatică "Tudor Vianu", București

Descrierea soluției

Demonstrăm existența numărului X prin inducție matematică după n, (n număr natural nenul).
Fie M_n mulțimea numerelor de n cifre formate doar cu cifrele 1 și 2. card(M_n)=2^n. Fie propoziția P(n): "Pentru orice număr natural nenul n există un număr natural nenul X_n din M_n astfel încât $2^n \mid X_n$"
Se observă că P(1) și P(2) sunt adevărate deoarece:

- $X_1=2$ și $2^1 \mid 2$
- $X_2=12$ și $2^2 \mid 12$

Presupunem P(k) adevărată, adică există un număr natural nenul X_k din M_k, astfel încât $2^k \mid X_k$. Atunci $X_k=2^k \cdot p$, unde p este un număr natural nenul.
Demostrăm că P(k) ➔ P(k+1) este adevărată.
Construim numărul X_{k+1} cu ajutorul lui X_k în funcție de paritatea lui p astfel:

- dacă p este par, atunci:
  - $p=2 \cdot q$
  - $\mathbf{X_{k+1}=2 \cdot 10^k+X_k} =2 \cdot 10^k+2^k \cdot p=2 \cdot 10^k+2^k \cdot 2 \cdot q=2^{k+1} \cdot 5^k+2^{k+1} \cdot q=2^{k+1}(5^k+q) \mid 2^{k+1}$
- dacă p este impar, atunci:
  - $p=2 \cdot q +1$
  - $\mathbf{X_{k+1}=1 \cdot 10^k+X_k} =10^k+2^k \cdot (2 \cdot q+1)=2^k(5^k+2 \cdot q+1) \mid 2^{k+1}$ deoarece $(5^k+2 \cdot q+1) \mid 2$

Observăm că numărul X_{k+1} construit aparține mulțimii M_{k+1} => P(n) este adevărată pentru orice n≥1.

În plus, există un singur număr X din M_n care să fie divizibil cu 2^n.
Vom arăta că numerele din M_n dau resturi distincte la împărțirea prin 2^n.
Pp că există două numere distincte $A_n=a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n$ și $B_n=b_1b_2b_3...b_{n-1}b_n$ din M_n care dau același rest la împărțirea prin 2^n ($a_i, b_i \in \{1,2\}$). Astfel aceste numere trebuie să aibă aceeași paritate (fie ambele sunt pare, fie ambele sunt impare) => $a_n=b_n=c$ și $2^n \mid A_n-B_n$
Notând cu $A_{n-1}=a_1a_2a_3...a_{n-1}$ și $B_{n-1}=b_1b_2b_3...b_{n-1}$ obținem că:
$A_n=10*A_{n-1}+c$ și $B_n=10*B_{n-1}+c$ ➔ $A_n-B_n=10(A_{n-1}-B_{n-1})$ ➔ $2^n \mid 10(A_{n-1}-B_{n-1})$
➔ $2^{n-1} \mid A_{n-1}-B_{n-1}$ ➔ numerele A_{n-1} și B_{n-1} dau același rest la împărțirea prin 2^{n-1}
Din această relație, deducem ca mai sus că: $a_{n-1}=b_{n-1}$
Repetând raționamentul descris, obținem că cele două numele A_n și B_n sunt egale, ($a_i=b_i$ pt. $i=1,2,...,n$).
Rezultă că presupunerea este falsă și că numerele distincte din M dau resturi diferite la împărtirea prin 2^n. Cum mulțimea resturilor împărțirii prin 2^n este R={0,1,2,3,..., 2^n-1} și card(M)=card(R)=2^n rezultă că există un singur număr X în mulțimea M divizibil cu 2^n

Acest număr X (soluția problemei) este al n-lea termen al șirului X_n construit conform relațiilor de mai sus:

$X_1=2^1 \cdot 1=2$
$X_2=2^2 \cdot 3=12$
....
$X_k=2^k \cdot p$

$$X_{k+1}=\begin{cases} 2 \cdot 10^k+X_k & \text{dacă } p=2 \cdot q \\ 1 \cdot 10^k+X_k & \text{dacă } p=2 \cdot q+1 \end{cases}$$